GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
MARIANA DRAGA-TĂTUCU, ELENA RÎMNICEANU,
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, LEONARD GIUGIUC,
DANIEL STRETCU, DENISA-NICOLETA NECIU, VLAD LUNGU

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele VII-VIII

2018-2019

Editura Paralela 45

CUPRINS

CUPRINS

clasa a VII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

7.O.1. Arătaţi că:

a) $\sqrt{192+\sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{8}}}}+\sqrt{22+\sqrt{3+\sqrt{35}}}<19$;

b) $\sqrt{11+\sqrt{6}+\sqrt{20}+\sqrt{42}}<5$.

7.O.2. a) Rezolvaţi ecuaţia: $\dfrac{1+2+...+2019}{2020-2019+2018...-1}+1=1+x+2+x+...+40+x$.

b) Arătaţi că ecuaţia $\dfrac{x+2019}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}(y+1010)$ are o infinitate de soluţii numere naturale.

7.O.3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar $E\in AC$ astfel încât $m(\sphericalangle EBC)=15°$. Fie EF bisectoarea unghiului AEB, $F\in AB$, M mijlocul lui EF, iar $MN\perp AC$, $N\in AC$. Dacă $MN\cap BE=\{P\}$, iar $BE=$ $=12$ cm, aflaţi-l pe FP.

7.O.4. Fie E, respectiv F mijloacele laturilor BC, respectiv CD ale paralelogramului $ABCD$. Fie $PE\parallel AF$, $P\in AB$, $PE\cap AC=\{M\}$, $PC\cap FM=\{T\}$, $PC\cap FE=\{S\}$.

a) Arătaţi că $AP=3\cdot PB$.

b) Arătaţi că $\dfrac{SE}{SF}+\dfrac{TM}{TF}=1$.

Arad

7.O.5. Arătaţi că $\left(\dfrac{7}{1}+1\right)\left(\dfrac{7}{2}+1\right)\left(\dfrac{7}{3}+1\right)\cdot...\cdot\left(\dfrac{7}{9}+1\right)=\left(\dfrac{9}{1}+1\right)\left(\dfrac{9}{2}+1\right)\left(\dfrac{9}{3}+1\right)\cdot...\cdot\left(\dfrac{9}{7}+1\right)$.

7.O.6. Pe prelungirea laturii CD a paralelogramului $ABCD$ se ia punctul P astfel încât $CD=2\cdot DP$. Notăm $BD\cap AP=\{M\}$, $BC\cap PA=\{N\}$, $DN\cap AB=\{G\}$. Demonstraţi că G este centrul de greutate al triunghiului MBN.

7.O.7. a) Demonstraţi că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2018^2}<1.$

b) Arătaţi că oricare ar fi n, număr raţional pozitiv, astfel încât $\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+...+\frac{2018}{n+2018}=2017,$ atunci $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+2018}=\frac{1}{n}.$

7.O.8. În triunghiul ABC, $AB = AC$, m($\sphericalangle A$) = 40°, considerăm $D \in (AC)$ astfel încât m($\sphericalangle ABD$) = 60°. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în E, iar T aparţine bisectoarei unghiului A, astfel încât $E \in (AT)$ şi $ET = AB$. Arătaţi că $ABTC$ este romb.

Argeș

7.O.9. a) Dacă $x=\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$, $y=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}+\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{48}}+\frac{\sqrt{9}+\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right):$ $:\frac{1}{3\sqrt{5}}$, calculaţi media geometrică a numerelor x şi y.

b) Aflaţi elementele mulţimii:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \frac{\left|3\sqrt{5}-7\right|+\sqrt{(3+2\sqrt{5})^2}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2x-5}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Dumitru Borocan

7.O.10. Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere raţionale pozitive cu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, atunci:

a) $\frac{1}{a+bc}=\frac{a}{(a+c)(a+b)}$;

b) $\frac{1}{c+ab}+\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}=\frac{2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2018

7.O.11. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, E mijlocul lui (AD) şi $F \in (DC)$. Dreptele BE şi CD se intersectează în punctul M, AF şi BC în N, ND şi BM în P. Demonstraţi că $\sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle PAM$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

7.O.12. Fie $ABCD$ un romb şi P un punct în interiorul său, astfel încât $AP = AB$. Fie M mijlocul segmentului PC, N şi Q mijloacele laturilor AD şi AB. Arătaţi că $BP \perp MN$ şi $DP \perp MQ$. În ce caz $MP \perp NQ$?

Marin Chirciu

Bacău

7.O.13. a) Arătaţi că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

b) Arătaţi că numărul:

$$A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + ... + \sqrt{1+3+...+2021}$$

este pătrat perfect.

7.O.14. Fie numerele raţionale pozitive $a_1, a_2, ..., a_{2018}$, astfel încât suma lor este 1 şi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = ... = \frac{a_{2017}}{a_{2018}} = \frac{1}{3}$.

a) Arătaţi că $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2017} = \frac{3^{2018} - 1}{2}$.

b) Găsiţi a_{2018}.

7.O.15. Fie $ABCD$ paralelogram, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, astfel încât $[AM] \equiv [NC]$ şi O este centrul paralelogramului.

a) Demonstraţi că M, O şi N sunt coliniare.

b) Dacă aria lui $ABCD$ este 24 cm^2 şi $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, aflaţi aria triunghiului NOC.

7.O.16. Fie O intersecţia diagonalelor paralelogramului $ABCD$ şi $M \in (AO)$, iar $N \in BD$ astfel încât $MN \parallel AB$. Dacă $\{E\} = DM \cap AB$, $\{F\} = AN \cap BC$, iar $BE \equiv CF$, demonstraţi că $ABCD$ este romb.

Bihor

7.O.17. Arătaţi că $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{3}\} + \{\sqrt{5}\} + ... + \{\sqrt{49}\} < 18$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

7.O.18. Găsiţi numerele naturale m şi n pentru care $\frac{4n}{2m+3} = \frac{n-2}{m}$.

7.O.19. Fie M şi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[DC]$ ale rombului $ABCD$, $BM \cap AC = \{P\}$, iar $BN \cap AC = \{T\}$.

a) Arătaţi că $MNTP$ este un trapez isoscel.

b) Dacă $AN \cap BD = \{G\}$ şi $GP \perp AB$, demonstraţi că $ABCD$ este un pătrat.

7.O.20. Pe laturile triunghiului ABC considerăm punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ şi $P \in (AB)$, astfel încât $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$. Arătaţi că:

$$\frac{MO}{MA} + \frac{NO}{NB} + \frac{PO}{PC} = 1.$$

Bistrița-Năsăud

7.O.21. Se consideră numărul $A = \overline{a,bc} + \overline{b,ca} + \overline{c,ab}$.

a) Aflaţi numărul A pentru $a = 3$, $b = 5$ şi $c = 7$.

b) Dacă $a + b = c$ şi $A = \dfrac{2^5 \cdot 2^4 : 2^7 \cdot 5^7 : 5^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot \sqrt{25} + 2^0}{10}$, determinaţi cifrele a, b şi c.

7.O.22. Aflaţi perechile de numere naturale (p, q) pentru care $\sqrt{pq} - q = 2019$.

7.O.23. Fie trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ şi $AD = AB + CD$. Bisectoarea unghiului DAB intersectează latura (BC) în M. Arătaţi că M este mijlocul lui $[BC]$ şi $m(\sphericalangle AMD) = 90°$.

7.O.24. Se consideră triunghiul ABC cu aria egală cu 210 cm^2 şi punctele M pe latura BC, P pe latura AC, astfel încât $BM = 2MC$ şi $CP = 2AP$. Dacă $\{Q\} = AM \cap BP$, aflaţi aria patrulaterului $MCPQ$.

Botoșani

7.O.25. a) Se consideră numerele $x = 19 - 4\sqrt{21}$, $y = 31 + 4\sqrt{21}$ şi $z = 34 + 6\sqrt{21}$. Calculaţi:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}.$$

b) Arătaţi că ecuaţia $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1009}} + \dfrac{1}{\sqrt{2018 - x} + \sqrt{1009}} = \dfrac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2018 - x}}$ are 2019 soluţii în mulţimea numerelor întregi.

7.O.26. Fie $ABCD$ un pătrat, punctul M simetricul lui B faţă de A şi $N \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle AMN) = 15°$. Arătaţi că $MN = AC$.

7.O.27. Se consideră şirul de numere $\sqrt{23}$, $\sqrt{56}$, $\sqrt{89}$, $\sqrt{1112}$, ..., $\sqrt{20182019}$.

a) Al câtelea termen este $\sqrt{20182019}$? Scrieţi al 2018-lea termen.

b) Demonstraţi că orice termen al şirului este număr iraţional.

7.O.28. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$, M un punct pe dreapta AB cu $B \in (AM)$, N pe dreapta AC cu $N \in (AC)$ şi $BM = CN$, iar $MN \cap BC = \{T\}$.

a) Arătaţi că T este mijlocul segmentului MN.

b) Arătaţi că $MN > BC$.

Brașov

7.O.29. Fie numerele $a = 4n + 5$, $b = 3n + 4$ şi $c = n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că numărul $\sqrt{[a; b] + [a; c]}$ este natural, unde prin $[x; y]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x şi y.

7.O.30. Arătaţi că, dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}^*_+$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$, atunci:

a) $\dfrac{1}{a + bc} = \dfrac{a}{(a + c)(a + b)}$;

b) $\dfrac{1}{c + ab} + \dfrac{1}{a + bc} + \dfrac{1}{b + ca} = \dfrac{2}{(a - 1)(b - 1)(c - 1)}$.

7.O.31. În triunghiul echilateral FET, $M \in (EF)$ astfel încât $FE = 3 \cdot FM$. Prin F se construiește o paralelă la ET, care intersectează $(TM$ în S.

a) Demonstrați că $TESF$ este trapez dreptunghic.

b) Dacă B este simetricul lui M față de S și A simetricul lui M față de F, arătați că $\mathcal{A}_{BETA} = \dfrac{8}{3}\mathcal{A}_{FET}$.

7.O.32. $ABCD$ este un patrulater convex cu lungimile laturilor $AB = 16$ cm, $BC = 10\sqrt{3}$ cm, $CD = 10$ cm și $DA = 12$ cm. Presupunem că există un punct M interior patrulaterului $ABCD$, astfel încât $AM = NR$ și $CM = PQ$, unde N, P, Q și R sunt picioarele perpendicularelor duse din M pe AB, BC, CD și DA.

a) Dacă S este mijlocul segmentului $[AM]$, arătați că punctele N, S, R sunt coliniare.

b) Arătați că $\mathcal{A}_{ABCD} < 186 \text{ cm}^2$.

Brăila

7.O.33. Arătați că $\sqrt{(1+2+3+\ldots+n)^2+(n+1)^3}$ este număr rațional, pentru orice n număr natural.

7.O.34. Fie $ABCD$ un paralelogram și $AC \cap BD = \{O\}$. Construim pătratele $AOPQ$ și $DOST$, astfel încât Q și T sunt de o parte și de alta a dreptei BD. Dacă Q, O, T sunt coliniare, atunci demonstrați că $ABCD$ este romb.

Daniela Stănică și Nicolae Stănică

7.O.35. Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{ab2}$, $\overline{bc7}$, $\overline{ca8}$ este egal cu 3, atunci demonstrați că $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este număr irațional.

Adelina Ion

7.O.36. Se consideră punctul M pe latura (BC) a triunghiului ABC. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, AMB, AMC, atunci demonstrați că centrele de greutate ale triunghiurilor AG_1M, AG_2M, AG_3M sunt coliniare.

Daniela Stănică și Nicolae Stănică

București

7.O.37. Determinați numerele naturale $\overline{xy}$ și $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{2019-a\sqrt{\overline{bcd}}} = a^2\sqrt{\overline{xy}}$.

Traian Preda

7.O.38. Fie x și y numere reale astfel încât $x+y$, $x+y^3$ și $x+y^5$ sunt numere raționale. Arătați că x și y sunt numere raționale.

Mihaela Berindeanu, *Gazeta Matematică* nr. 4/2018

7.O.39. $ABCD$ este un paralelogram, punctul E este simetricul lui A față de C, iar $EF \parallel CD$, unde $F \in AD$. Notăm $FC \cap BE = \{N\}$ și $BF \cap AE = \{M\}$.

a) Demonstrați că $MN \parallel EF$.

b) Aflați raportul dintre aria patrulaterului $BMCN$ și aria paralelogramului $ABCD$.

Bogdan Georgescu

7.O.40. Triunghiul ABC este un triunghi isoscel ($AB = AC$) cu $m(\sphericalangle A) = 36°$, BM este bisectoarea unghiului ABC, $M \in (AC)$ și BN este bisectoarea unghiului ABM, $N \in (AM)$. Demonstrați că:

a) $MC \equiv AN$;

b) $\left(\frac{AN}{NM}\right)^2 = \frac{AN}{NM} + 1$.

Traian Preda

Buzău

7.O.41. Fie $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^3 + \ldots + \sqrt{5}^{2019}$.

a) Arătați că $x + 5^{1010} = x\sqrt{5} + 1$.

b) Arătați că $\frac{4x}{\sqrt{5}+1} + 1$ este pătratul unui număr natural.

7.O.42. a) Demonstrați că $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oricare ar fi numerele a, b, c, d, cu $a \neq b$ și $c \neq d$.

b) Determinați toate numerele reale x care verifică relația: $\frac{x^2 + 2019x + 2018}{x^2 - 2019x + 2018} = \frac{x^2 + 2020x + 2019}{x^2 - 2020x + 2019}$.

7.O.43. Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC, E simetricul lui G față de dreapta BC, F mijlocul segmentului $[AE]$, $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii $[BC]$.

a) Arătați că punctele G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.

b) Calculați aria triunghiului FGE în funcție de x, unde x este aria paralelogramului de la punctul a).

7.O.44. În triunghiul ABC cu proprietatea $3AC = BC$, CD este bisectoarea unghiului C, $D \in AB$. Pe latura BC se consideră punctul P, astfel încât $2BP = PC$.

a) Dacă $AB = 35$ cm, aflați lungimea segmentului DP.

b) Arătați că $\mathcal{A}_{\Delta BDP} = 20\% \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}$.

Caraș-Severin

7.O.45. Se dau mulțimile $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{10}\}$, $B = \{\sqrt{11}, \sqrt{12}, \ldots, \sqrt{20}\}$ și $C = \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}$.

Determinați numărul de elemente raționale ale mulțimii C.

7.O.46. Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care:

$$2x^2 - 2y \leq 15 \text{ și } 2x^2 + x(1 - 4y) - 2y = 15.$$

7.O.47. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, E mijlocul lui $[BC]$ și M un punct pe (BC). Paralelele prin M la AE intersectează dreptele AB și AC în S, respectiv T. Arătați că suma $MS + MT$ este constantă.

7.O.48. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle C) = 30°$ și E mijlocul segmentului (BC). Perpendiculara în E pe BC intersectează pe AC în F. Arătați că $BF \perp AE$.

Călărași

7.O.49. Fie a, b, c trei numere reale cu proprietățile $abc = 1$ și $a + ab + 1 \neq 0$. Demonstrați că:
a) $b + bc + 1 \neq 0$;
b) $\frac{a+2018}{a+ab+1}+\frac{b+2018}{b+bc+1}+\frac{c+2018}{c+ca+1}=2019.$

Florin Ștefan Marcu

7.O.50. a) Fie x un număr real. Precizați care dintre următoarele egalități nu este adevărată:
E_1) $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$; E_2) $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 3$; E_3) $9x^2 - 12x + 5 = (3x - 2)^2 + 1$.
b) Fie triunghiul ABC și a, b, c numere reale pozitive astfel încât $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Dacă este adevărată inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+2}+\sqrt{b^2-4b+5}+\sqrt{4c^2-12c+10}\leq 3$, calculați perimetrul triunghiului ABC.

Adriana Constantin

7.O.51. Fie triunghiul ABC cu $AB = 15$ cm și $AC = 18$ cm și fie punctele E și F care aparțin segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, astfel încât $AE = 12$ cm, $AF = 10$ cm. Dacă $BC \cap EF = \{T\}$, atunci:
a) arătați că $\Delta EAF \sim \Delta CAB$;
b) determinați $\frac{\mathscr{A}_{TEB}}{\mathscr{A}_{ABC}}$.

Gabriela Ruse

7.O.52. În ΔABC, bisectoarea unghiului ABC intersectează latura (AC) în punctul N și punctul M este mijlocul laturii (BC). Dacă $AM \cap BN = \{P\}$ și $AB \cap CP = \{D\}$, atunci demonstrați că triunghiul BDN este isoscel.

Cristina Bornea

Cluj

7.O.53. a) Rezolvați ecuația $(x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 2019) = 2019^2 + 2019$ pe mulțimea numerelor raționale.

Andrea-Alice Jakab-Medvessi

b) Se dau numerele $a = \sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$ și $b = \sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b.

Cristian Petru Pop

7.O.54. Calculați valoarea expresiei $E = a^{b^c} + b^{c^a} + c^{a^b}$, știind că $a = \sqrt{1\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{4}}\cdot...\cdot\sqrt{1\frac{1}{99}}\cdot\sqrt{2}$,
$b=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\left|-\sqrt{5}\right|$, iar $c=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}}{\sqrt{8}}$.

Rodica Lădar

7.O.55. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB = 16$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 9$ cm. Fie M simetricul punctului C față de AB. Știind că semidreapta $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD, calculați perimetrul patrulaterului $ACBM$.

Dana Bodea

7.O.56. Fie paralelogramul $ABCD$ în care E este mijlocul segmentului BC. Prin punctul F, $\{F\} = AC \cap DE$, se duc paralelele FT şi FP la AB, respectiv AD, $T \in (BC)$, $P \in (DC)$.

a) Arătaţi că $\frac{CT}{BC} + \frac{DP}{CD} = 1$.

b) Aflaţi raportul dintre aria triunghiului FEC şi aria triunghiului DAF.

Cristian Petru Pop

Constanţa

7.O.57. a) Demonstraţi că $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$, $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$.

b) Se dau numerele $a = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + \frac{4}{8\cdot 12} + \frac{5}{12\cdot 17} + \frac{6}{17\cdot 23} + \frac{7}{23\cdot 30}$ şi $b = 3 + 8 + 13 + \ldots + 10018$. Calculaţi partea întreagă a numărului $\sqrt{15\cdot a + \frac{b}{1002}}$.

7.O.58. a) Arătaţi că, pentru orice $x \in \mathbb{N}$ care nu este multiplu de 3, restul împărţirii lui x^2 la 3 este egal cu 1.

b) Demonstraţi că $a = \sqrt{2018^{2020} + 2020^{2018} + 2019}$ este iraţional.

7.O.59. Se consideră un triunghi ascuţitunghic ABC şi fie D piciorul înălţimii din A pe BC. Se duce $DE \perp AC$, $E \in AC$ şi fie F un punct pe segmentul (DE), astfel încât $AF \perp BE$. Arătaţi că $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BD}$.

7.O.60. Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in AC$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$ şi N simetricul lui M faţă de BC. Dreapta NC intersectează paralela prin A la BC în T, iar TM intersectează pe BC în O şi pe AB în Q.

a) Demonstraţi că $ABCT$ este romb.

b) Arătaţi că BO este linie mijlocie în triunghiul ATQ.

Covasna

7.O.61. Determinaţi numerele a, b şi c care verifică simultan condiţiile:

i) media aritmetică a numerelor a, b, c este $(-1)^{100} \cdot (-3)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$;

ii) $\frac{7a-2b}{8b+5a} = \frac{2}{5}$;

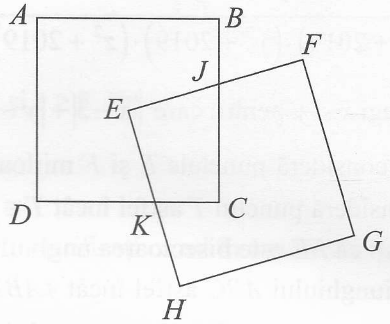
iii) numerele b şi c sunt invers proporţionale cu 0,04 şi 0,(3).

7.O.62. Se dau numerele $a = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{20}{192\cdot 212}$ şi $b = 1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + 2016$.

Arătaţi că $\sqrt{212\cdot a + \frac{b}{2017} - 1}$ este un număr iraţional.

7.O.63. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC în care $m(\sphericalangle C) = 60°$, E simetricul lui A faţă de mijlocul lui (BC) şi F simetricul lui A faţă de BC. Arătaţi că $BCFE$ este trapez isoscel şi $BC = BE + EF$.

7.O.64. Două pătrate cu laturile de lungime de 16 cm sunt plasate astfel încât vârful unuia se găseşte în centrul celuilalt (ca în figura de mai jos). Calculaţi aria patrulaterului $EJCK$.



Dâmboviţa

7.O.65. a) Fie $A = \frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\frac{6}{4\cdot 5}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$. Arătaţi că $\sqrt{A} < 0,9$.

b) Demonstraţi că $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+...+\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right) < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Gheorghe Molea

7.O.66. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $\frac{x+1000}{10} = \frac{1000}{x+10}$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $\frac{x+1}{2} - \frac{3}{y+1} = 4$.

Gheorghe Iacob

7.O.67. În exteriorul rombului $ABCD$ se construiesc pătratele $BCMN$ şi $ADEF$.

a) Demonstraţi că $AN \parallel CE$.

b) Arătaţi că centrele celor două pătrate şi centrul rombului sunt puncte coliniare.

Toma Gloambeş şi Lucian Gloambeş

7.O.68. Fie $ABCD$ un paralelogram, $M \in (BC)$, $N \in (AD)$, astfel încât $BM = DN$, $\{O\} = MN \cap AC$. Arătaţi că:

a) $OM = ON$;

b) dacă $\{E\} = CN \cap AB$, $\{F\} = DM \cap AB$, atunci AB este media geometrică între AE şi BF ($AB = \sqrt{AE \cdot BF}$).

Damian Marinescu

Dolj

7.O.69. a) Determinaţi cifrele a şi b astfel încât $\sqrt{\overline{b7b}} = \overline{ab}$. (Numerele sunt scrise în baza 10.)

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ şi $xy + yz + zx = 2019$, arătaţi că:

$$\sqrt{\left(x^2+2019\right)\cdot\left(y^2+2019\right)\cdot\left(z^2+2019\right)} \in \mathbb{Q}.$$

7.O.70. Determinaţi numerele întregi x şi y pentru care $\left||x-3|+|y-2x|\right| = 3$.

7.O.71. În dreptunghiul $ABCD$ se consideră punctele E şi F mijloacele laturilor AD şi, respectiv, BC. Pe prelungirea laturii CD se consideră punctul T astfel încât $T \in (CD$. Notăm punctul de intersecţie a dreptelor TE şi AC cu S. Arătaţi că FE este bisectoarea unghiului SFT.

7.O.72. Fie M un punct interior triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$. Dacă P şi Q sunt proiecţiile lui M pe AB, respectiv AC şi E este mijlocul segmentului $[BC]$, arătaţi că $[EP] \equiv [EQ]$.

Galaţi

7.O.73. Fie numărul $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2^3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2^4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2^{2018}}}$. Demonstraţi că:

a) $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot A \in \mathbb{Q}$;

b) $A < \sqrt{2}+1$.

7.O.74. În triunghiul ascuţitunghic ABC, mediana AM, $M \in BC$, este congruentă cu înălţimea BH, $H \in AC$. Calculaţi măsura unghiului CAM.

7.O.75. Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive care satisfac condiţia $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$, atunci:

a) $\dfrac{1}{a+b\cdot c} = \dfrac{a}{(a+b)\cdot(a+c)}$;

b) $\dfrac{1}{a+b\cdot c} + \dfrac{1}{b+a\cdot c} + \dfrac{1}{c+a\cdot b} = \dfrac{2}{(a-1)\cdot(b-1)\cdot(c-1)}$.

7.O.76. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AD = DC = BC$. Pe perpendiculara din D pe AB se consideră punctul E, astfel încât D şi E sunt de o parte şi de alta a dreptei AB şi $DE = BE$. Perpendiculara din D pe BE intersectează latura AB în H.

a) Demonstraţi că patrulaterul $DHBC$ este romb.

b) Demonstraţi că $2 \cdot BC \cdot BE = CE \cdot AC$.